ПОДРУЖНИЦА МАТЕМАТИЧАРА ВАЉЕВО
ВАЉЕВСКА ГИМНАЗИЈА

ИНТЕГРАЛ КУП 2019

Ваљево, 30. новембар 2019.

Задаци на турниру су подељени у три целине: I Алгебра и бројеви, II Геометрија и III Комбинаторика. У свакој целини дата су три задатка са вишеструким избором и један задатак који је потребно детаљно решити. Задаци са вишеструким избором вреде по 5 поена, док задаци који се детаљно решавају вреде по 10 поена. У сваком задатаку са вишеструким избором понуђено је пет одговора (**А**, **Б**, **В**, **Г**, **Д**) од којих је само један тачан и одговор **Н** (не знам). Заокруживање само одговора **Н** не доноси ни негативне ни позитивне поене. У случају заокруживања нетачног одговора или заокруживања више од једног одговора, као и у случају да се не заокружи ни један одговор, добија се **-1** поен. Време за израду задатака је 150 минута.

1. и 2. разред

I Алгебра и бројеви

1. Ако је $x = 4^4 \cdot 5^5 \cdot 6^6$ и $y = 4^6 \cdot 5^5 \cdot 6^4$, колико природних делилаца има број $x+y$?

   (А) 210 (Б) 390 (В) 510 (Г) 630 (Д) 900 (Н) Не знам

2. Ако је $n = 999\,999\,998$, са колико различитих цифара се записује број n^3?

   (А) 2 (Б) 3 (В) 4 (Г) 5 (Д) 7 (Н) Не знам

3. Дефинишимо функцију $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ са

$$f(1) = 2 \text{ и } f(n) = \begin{cases} f(n-1)+1 & \text{ако је } n \text{ парно,} \\ f(n-1)+2 & \text{ако је } n \text{ непарно и } n > 1. \end{cases}$$

   Колико је $f(2019)$?

   (А) 2019 (Б) 2020 (В) 3029 (Г) 3030 (Д) 4040 (Н) Не знам

4. Нека је $n = 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 64!$. Испитати постоје ли природни бројеви x и y такви да је $x! \cdot y^2 = n$.

II Геометрија

1. Квадрат $ABCD$ има дијагоналу дужине 1. Ако је O центар кружнице уписане у троугао BCD, онда је растојање од A до O једнако

   (А) $\frac{2}{3}$ (Б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (В) $\frac{3}{4}$ (Г) $\frac{4}{5}$ (Д) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (Н) Не знам

2. Скуп T садржи троуглове чије су дужине страница природни бројеви мањи од 6. Колико највише елемената може имати скуп T ако у њему нема ни подударних ни сличних троуглова?

   (А) 15 (Б) 16 (В) 17 (Г) 18 (Д) више од 18 (Н) Не знам

3. Дат је троугао ABC такав да је $AB = 42, BC = 34$ и $CA = 20$. На страници AB дата је тачка D таква да је $AD = 14$, а на страници AC тачка E таква да је $AE = 15$. Површина троугла ADE је једнака

   (А) 84 (Б) 96 (В) 108 (Г) 112 (Д) 144 (Н) Не знам

4. За правоугли трапез $ABCD$ важи да је $AB \parallel CD$ и $\measuredangle ABC = 75^\circ$. Нека је H подножје нормале из тачке A на праву BC. Ако је $BH = CD$ и $AD + AH = 8$, одредити површину трапеза $ABCD$.

III Комбинаторика

1. Прва три потеза у шаховској партији одиграна су скакчима (два потеза белог и један потез црног). На колико начина је то могуће?

   (А) 32 (Б) 46 (В) 64 (Г) 96 (Д) 112 (Н) Не знам

2. Нека је $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $B = \{2, 3, 5\}$. Број свих функција $f : A \to B$ таквих да за свако $x \in A$ важи $f(x) \neq x$ је

   (А) 24 (Б) 54 (В) 216 (Г) 514 (Д) 702 (Н) Не знам

3. Колико подскупова, који имају више од 2 елемента, има скуп који има 10 елемената?

   (А) 968 (Б) 969 (В) 979 (Г) 1013 (Д) 1023 (Н) Не знам

4. Означимо са $D(n)$ скуп природних делилаца природног броја n. Под бојењем скупа $D(n)$ подразумевамо записивање сваког његовог елемента неком од четири дате боје, при чему се три елемента скупа $D(n)$ морају записати различитим бојама кад год је један од њих највећи заједнички делилац друга два.
   Нека $\varphi(n)$ представља број различитих бојења скуп $D(n)$. Која је највећа вредност коју може имати $\varphi(n)$ ако је n природан број који није степен простог броја?

ОДГОВОРИ И РЕШЕЊА

I Алгебра и бројеви

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**Д**	**Г**	**В**

Задатак 4. Како је

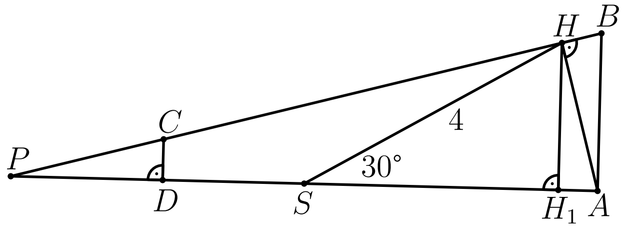
$$\begin{aligned}1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot 64! &= 1!\cdot(1!\cdot 2)\cdot 3!\cdot(3!\cdot 4)\cdot\ldots\cdot 63!\cdot(63!\cdot 64)\\ &= (1!\cdot 1!)\cdot 2\cdot(3!\cdot 3!)\cdot 4\cdot\ldots\cdot(63!\cdot 63!)\cdot 64\\ &= ((1!)^2\cdot(3!)^2\cdot\ldots\cdot(63!)^2)\cdot(2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 64)\\ &= (1!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 63!)^2\cdot(2\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2\cdot 32)\\ &= (1!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 63!)^2\cdot 2^{32}\cdot 32!\\ &= (2^{16}\cdot 1!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 63!)^2\cdot 32!,\end{aligned}$$

то за $x = 32$ и $y = 2^{16}\cdot 1!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 63!$ важи $x!\cdot y^2 = n$, што потврђује егзистенцију тражених бројева.

II Геометрија

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**Б**	**В**	**А**

Задатак 4. Означимо са P пресек правих AD и BC. Имамо да је $\measuredangle ABC = \measuredangle DCP$ (одговарајући углови на трансвезали).



На основу СУС ($BH = CD$, 75°, 90°) закључујемо да $BHA \cong CDP$, а из чега следи $AH = PD$ и $P_{ABCD} = P_{AHP}$.
Даље, $PA = PD + DA = AH + DA = 8$.
Означимо са S средиште дужи PA. Како је троугао AHP правоугли са правим углом код H, то је $SA = SH = SP = 4$.
У троуглу SAH важи $SA = SH$ и $\measuredangle SAH = \measuredangle SAB - \measuredangle HAB = 75°$, па је $\measuredangle HSA = 180° - 2\cdot 75° = 30°$.
Означимо са H_1 подножје нормале из H на PA. Троугао SH_1H је правоугли са хипотенузом $SH = 4$ и углом $\measuredangle HSH_1 = \measuredangle HSA = 30°$, из чега закључујемо да је $HH_1 = 4 : 2 = 2$.
Најзад, $P_{ABCD} = P_{AHP} = \dfrac{1}{2}\cdot AP\cdot HH_1 = 8$.
Напомена: Не очекује се да ученик доказује имплицитно коришћене распореде тачхака на правама.

III Комбинаторика

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**Г**	**В**	**А**

Задатак 4. Означимо са $T(n)$ скуп свих уређених тројки (a, b, c) где су a, b, c различхити елементи скупа $D(n)$ такви да $c = \mathrm{NZD}(a, b)$. Једини услов при додељивању боја елементима скупа $D(n)$ је да су бројеви a, b, c различитих боја за свако $(a, b, c) \in T(n)$.

Ако $D(n)$ садржи три различита проста броја p, q и r, онда бројеве $1, p, q, r$ и pq треба записати различитим бојама јер

$$(q, p, 1), (r, p, 1), (r, q, 1), (pq, r, 1), (pq, pr, p), (pq, qr, q) \in T(n).$$

Како немамо пет боја на располагању, следи да се $D(n)$ не може обојити ($\varphi(n) = 0$) ако n има више од два проста делиоца.

Размотримо случај када n има два проста делиоца (p и q).

Ако $D(n)$ садржи p^2 и q^2, онда бројеви $1, p, q, p^2$ и q^2 морају бити различитих боја јер

$$(q, p, 1), (p^2, q, 1), (p^2, pq, p), (q^2, p, 1), (q^2, pq, q), (q^2, p^2, 1) \in T(n).$$

Ако $D(n)$ садржи p^3 и q, онда бројеви $1, p, q, p^2$ и p^3 морају бити различитих боја јер скуп $T(n)$ садржи тројке

$$(q, p, 1), (p^2, q, 1), (p^2, pq, p), (p^3, q, 1), (p^3, pq, p), (p^3, p^2q, p^2).$$

Дакле, $\varphi(n) = 0$ ако n има два проста делиоца и више од три проста чиниоца.

Ако је $n = p^2 \cdot q$, онда је $D(n) = \{1, p, q, p^2, pq, n\}$. Слично као и раније, закључујемо да $1, p, q, p^2$ морају бити различитих боја. Како се pq налази једино у тројци $(p^2, pq, p) \in T(n)$, то се његова боја мора једино разликовати од боја бројева p и p^2 . Боја броја n може бити било која од 4 дате боје јер се n не налази ни у једној тројци скупа $T(n)$. Дакле, $\varphi(n) = 4! \cdot 2 \cdot 4 = 192$.

Ако је $n = p \cdot q$, онда је $D(n) = \{1, p, q, n\}$, па сличним разматрањем као у претходном случају добијамо $\varphi(n) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 96$.

Како не треба разматрати случај када n има тачно једног простог делиоца, то је остао једино случај $n = 1$ (иако се број 1 може посматрати као степен простог броја са експонентом 0). Очигледно је $\varphi(1) = 4$.
Дакле, тражена вредност је 192.