



ПОДРУЖНИЦА МАТЕМАТИЧАРА ВАЉЕВО  
ВАЉЕВСКА ГИМНАЗИЈА

## ИНТЕГРАЛ КУП 2019

Ваљево, 30. новембар 2019.

Задаци на турниру су подељени у три целине: I АЛГЕБРА И БРОЈЕВИ, II ГЕОМЕТРИЈА И III КОМБИНАТОРИКА. У свакој целини дата су три задатка са вишеструким избором и један задатак који је потребно детаљно решити. Задаци са вишеструким избором вреде по 5 поена, док задаци који се детаљно решавају вреде по 10 поена. У сваком задатаку са вишеструким избором понуђено је пет одговора (А, Б, В, Г, Д) од којих је само један тачан и одговор Н (не знам). Заокруживање само одговора Н не доноси ни негативне ни позитивне поене. У случају заокруживања нетачног одговора или заокруживања више од једног одговора, као и у случају да се не заокружи ни један одговор, добија се -1 поен. Време за израду задатака је 150 минута.

### 6. разред

#### I АЛГЕБРА И БРОЈЕВИ

1. Збир 111 узастопних целих бројева је 0. Збир њихових апсолутних вредности је  
(А) 0      (Б) 110      (В) 1540      (Г) 3080      (Д) 6105      (Н) Не знам

2. Колико парова целих бројева  $x$  и  $y$  задовољавају једнакост

$$|3x| + |5y| = 15?$$

- (А) 0      (Б) 10      (В) 6      (Г) 8      (Д) 4      (Н) Не знам

3. Колика је вредност производа

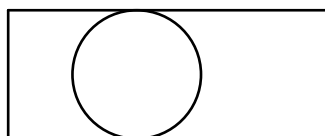
$$\frac{6}{3} \cdot \frac{9}{6} \cdot \frac{12}{9} \cdot \frac{15}{12} \cdot \dots \cdot \frac{2019}{2016}?$$

- (А) 673      (Б) 1346      (В) 2019      (Г) 1344      (Д) 675      (Н) Не знам

4. Дат је скуп  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -37 \leq x \leq 84\}$ . Постоји ли подскуп  $B$  скупа  $A$  такав да је збир елемената скупа  $B$  једнак збиру елемената скупа  $A \setminus B$ ?

#### II ГЕОМЕТРИЈА

1. Кружница пречника 10 додирује две дуже стране правоугаоника као на слици. Ако је једна страница правоугаоника две петине од друге, онда је обим правоугаоника једнак

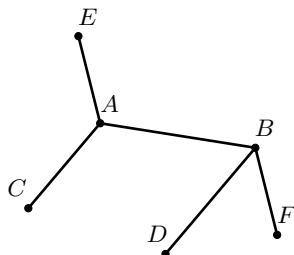


- (А) 140      (Б) 70      (В) 56      (Г) 28      (Д) 100      (Н) Не знам

2. Ако на датој слици важи:

$$AC \parallel BD, AE \parallel BF, \angle CAB = 123^\circ, \angle DBF = 45^\circ \text{ и } \angle EAC = x^\circ,$$

колики је збир цифара броја  $x$ ?



- (А) 3      (Б) 6      (В) 9      (Г) 10      (Д) 15      (Н) Не знам

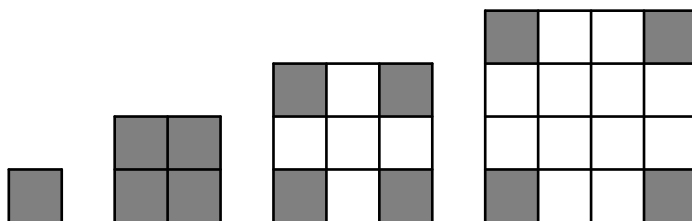
3. У троуглу  $ABC$  спољашњи угао код темена  $C$  је 5 пута већи од унутрашњег угла код темена  $B$  и  $\angle ABC + \angle BCA = 81^\circ$ . Колико је  $3 \cdot \angle BCA - \angle ABC$ ?

- (А)  $100^\circ$       (Б)  $111^\circ$       (В)  $122^\circ$       (Г)  $133^\circ$       (Д)  $144^\circ$       (Н) Не знам

4. Дат је троугао  $ABC$  такав да је  $\angle BAC = 50^\circ$  и  $\angle ABC = 60^\circ$ . Симетрале страница  $AC$  и  $BC$  секу се у тачки  $O$ . Одредити мере углова  $\angle AOB$ ,  $\angle BOC$  и  $\angle COA$ .

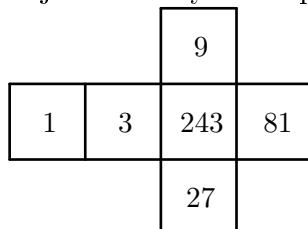
### III КОМБИНАТОРИКА

1. Колико има белих квадрата на 40. члану низа чија су прва четири члана дата на слици?



- (А) 1596      (Б) 271      (В) 278      (Г) 1000      (Д) 1560      (Н) Не знам

2. Пет коцака, чија је мрежа приказана на слици, сложене су једна на другу тако да је добијен квадрат. Колики је најмањи могући збир бројева на странама квадрата?



- (А) 600      (Б) 843      (В) 602      (Г) 601      (Д) 435      (Н) Не знам

3. На табли су нацртани различити магични квадрати чији су елементи бројеви 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Колико је највише магичних квадрата нацртано на табли?

- (А) 2      (Б) 4      (В) 6      (Г) 8      (Д) 9      (Н) Не знам

4. Палиндром је број који се чита слева у десно једнако како се чита здесна у лево (на пример: 13531 је палиндром). Да ли је више непарних троцифрених бројева који су палиндром или је више парних четвороцифрених бројева који су палиндром?

# ОДГОВОРИ И РЕШЕЊА

## I АЛГЕБРА И БРОЈЕВИ

Број задатка	1	2	3
Тачан одговор	Г	Д	А

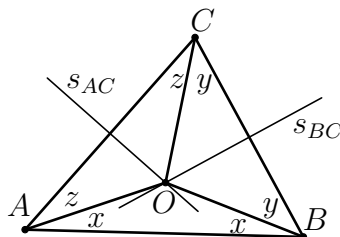
**Задатак 4.** Нека је  $B$  произвољан подскуп скупа  $A$ . Означимо са  $x$  збир елемената скупа  $B$ , а са  $y$  збир елемената скупа  $A \setminus B$ . Важи да је  $x + y$  једнак збиру елемената скупа  $A$ . Како је збир елемената скупа  $A$  једнак  $-37 + (-36) + \dots + 84 = 38 + 39 + \dots + 84 = 122 \cdot 23 + 61$ , то је он непаран број, па не може бити  $x = y$ .

Дакле, не постоји  $B \subseteq A$  такав да је збир елемената скупа  $B$  једнак збиру елемената скупа  $A \setminus B$ .

## II ГЕОМЕТРИЈА

Број задатка	1	2	3
Тачан одговор	Б	В	Д

**Задатак 4.** Како је  $O$  тачка на симетрали дужи  $AC$ , то је  $OA = OC$ . Слично је и  $OB = OC$ , па је и  $OA = OB = OC$ . Одатле закључујемо да су троуглови  $AOB$ ,  $BOC$  и  $COA$  једнакокраки као и да су њихове основице  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$ , редом. Истим тим редом, означимо мере унутрашњих углова на основицама посматраних једнакокраких троуглова са  $x$ ,  $y$  и  $z$  (види слику).



Сада имамо  $\angle BAC = x + z$ ,  $\angle ABC = x + y$ ,  $\angle BCA = y + z$ , из чега добијамо  $x + z + x + y + y + z = 180^\circ$ , тј.  $2x + 2y + 2z = 180^\circ$ , па  $x + y + z = 90^\circ$ . Како је  $x + z = \angle BAC = 50^\circ$  и  $x + y = \angle ABC = 60^\circ$ , то редом добијамо  $y = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ ,  $z = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$  и  $x = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ$ . Најзад, из троуглова  $AOB$ ,  $BOC$  и  $COA$  добијамо  $\angle AOB = 180^\circ - 2x = 140^\circ$ ,  $\angle BOC = 180^\circ - 2y = 100^\circ$  и  $\angle COA = 180^\circ - 2z = 120^\circ$ .

## III КОМБИНАТОРИКА

Број задатка	1	2	3
Тачан одговор	А	В	Г

**Задатак 4.** Непарни троцифрени палиндроми су троцифрени природни бројеви облика  $\overline{ABA}$ , где је  $A$  било која непарна цифра, а  $B$  било која цифра. Дакле, непарних троцифрених палиндрома има  $5 \cdot 10 = 50$ .

Парни четвороцифрени палиндроми су четвороцифрени природни бројеви облика  $\overline{ABBA}$ , где је  $A$  било која парна цифра различита од 0, а  $B$  било која цифра. Дакле, парних четвороцифрених палиндрома има  $4 \cdot 10 = 40$ .

Према томе, више је непарних троцифрених палиндрома.