ПОДРУЖНИЦА МАТЕМАТИЧАРА ВАЉЕВО
ВАЉЕВСКА ГИМНАЗИЈА

ИНТЕГРАЛ КУП 2019

Ваљево, 30. новембар 2019.

Задаци на турниру су подељени у три целине: I Алгебра и бројеви, II Геометрија и III Комбинаторика. У свакој целини дата су три задатка са вишеструким избором и један задатак који је потребно детаљно решити. Задаци са вишеструким избором вреде по 5 поена, док задаци који се детаљно решавају вреде по 10 поена. У сваком задатаку са вишеструким избором понуђено је пет одговора (**А**, **Б**, **В**, **Г**, **Д**) од којих је само један тачан и одговор **Н** (не знам). Заокруживање само одговора **Н** не доноси ни негативне ни позитивне поене. У случају заокруживања нетачног одговора или заокруживања више од једног одговора, као и у случају да се не заокружи ни један одговор, добија се **-1** поен. Време за израду задатака је 150 минута.

7. и 8. разред

I Алгебра и бројеви

1. Ако је x негативан реалан број, колико од наведених израза има негативну вредност?
$$\frac{x}{|x|},\quad -\frac{1}{x},\quad -x^2,\quad \sqrt{-x},\quad (-x)^{2019},\quad \frac{|-2x|}{x}$$
(А) 2 (Б) 3 (В) 4 (Г) 5 (Д) 6 (Н) Не знам

2. Неки троцифрен природан број је 33 пута већи од збира својих цифара. Разлика између највеће и најмање цифре тог броја је
(А) 3 (Б) 4 (В) 5 (Г) 6 (Д) 7 (Н) Не знам

3. Број решења једначине $x \cdot y^2 = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 10$ у скупу целих бројева је
(А) 12 (Б) 20 (В) 30 (Г) 45 (Д) 60 (Н) Не знам

4. Колико има четвороцифрених природних бројева који се исто читају слева на десно и здесна на лево, а који су потпуни квадрати?

II Геометрија

1. Ако у оштроуглом троуглу ABC важи $\measuredangle CAB = 30^\circ, BC = \sqrt{2}$ и $AC = 2$, онда је $\measuredangle ABC$ једнак

   (А) 15° (Б) $22^\circ 30'$ (В) 30° (Г) 45° (Д) 60° (Н) Не знам

2. У једнакокраком трапезу висине 12, средња линија има дужину 16. Дужина дијагонале тог трапеза је

   (А) 18 (Б) 20 (В) 22 (Г) 24 (Д) 26 (Н) Не знам

3. Дат је трапез чије су основице 7 и 32, а краци 15 и 20. Ако је површина тог трапеза x, збир цифара броја x је

   (А) 9 (Б) 10 (В) 11 (Г) 12 (Д) 13 (Н) Не знам

4. Дат је паралелограм $ABCD$ и тачка M у његовој унутрашњости која не припада ни дијагоналама ни дужима које спајају средишта наспрамних страница паралелограма. Кроз тачку M повучене су две праве које су паралелне страницама паралелограма. Те две праве разлажу дати паралелограм на четири четвороугла. Доказати да бар један од два добијена четвороугла, од којих један садржи теме A, а други теме C, има површину мању од четвртине површине паралелограма $ABCD$.

III Комбинаторика

1. Прва два потеза у шаховској партији одиграна су пешацима (по један потез белог и црног играча). На колико начина је то могуће?

   (А) 32 (Б) 64 (В) 128 (Г) 192 (Д) 256 (Н) Не знам

2. У непровидној врећи налази се 15 црвених, 16 црних и 17 белих куглица. Миланче, не гледајући, извлачи куглице из вреће. Колико најмање куглица мора да извуче да би био сигуран да међу извученим куглицама има 7 црвених, 6 црних и 5 белих?

   (А) 18 (Б) 36 (В) 38 (Г) 40 (Д) 48 (Н) Не знам

3. Колико има петословних шифара записаних свим словима речи ШИФРА, таквих да су прво и последње слово самогласници?

   (А) 6 (Б) 12 (В) 18 (Г) 24 (Д) 120 (Н) Не знам

4. Нека је S скуп свих петоцифрених природних бројева $\overline{abcde}$ за које важи $b = a \cdot c$ и $d = c + e$. Одреди број елемената скупа S.

ОДГОВОРИ И РЕШЕЊА

I Алгебра и бројеви

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**Б**	**В**	**Д**

Задатак 4. Нека је n тражени природан број. Како се он исто чита слева на десно као и здесна на лево, закључујемо да је $n = \overline{ABBA}$, за неку цифру $A \neq 0$ и неку цифру B.
Из $\overline{ABBA} = A \cdot 1001 + B \cdot 110 = 11 \cdot (91A + 10B)$, добијамо да је n дељив са 11. Како је n потун квадрат, то 11 мора бити прост чинилац броја $91A + 10B = 11 \cdot (8A) + 3A + 10B$, па $11 \mid 3A + 10B$. Из последње релације добијамо да A и B могу бити једино неки од парова из табеле

A	1	2	3	4	5	6	8	9
B	3	6	9	1	4	7	2	5

,

тј. $n \in \{1331, 2662, 3993, 4114, 5445, 6776, 8228, 9559\}$.
Како ниједан од бројева из наведеог скупа није потпун квадрат ($2662, 3993, 8228$ се не завршавају са $1, 4, 5, 6, 9$; $2 \mid 4114$, $4 \nmid 4114$; $5 \mid 5445$, $25 \nmid 5445$; $1331 = 11^3$; $6776 = 2^3 \cdot 7 \cdot 11^2$; $9559 = 11^2 \cdot 79$), то
закључујемо да не постоји прирородан број са траженим особинама.

II Геометрија

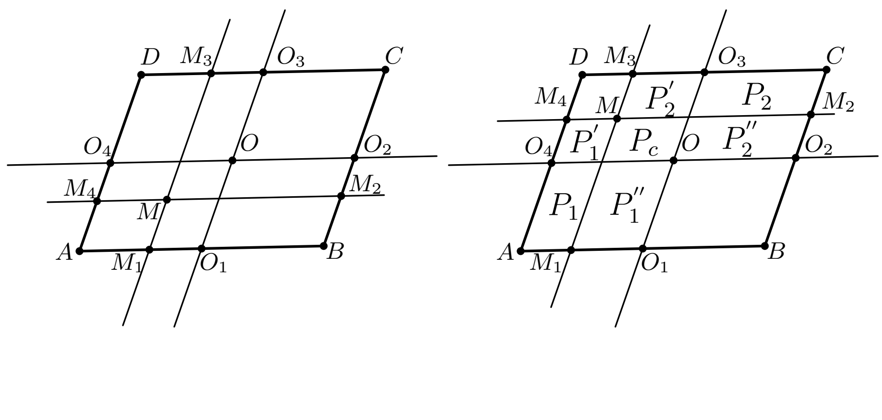
Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**Г**	**Б**	**А**

Задатак 4. Означимо са M_1, M_2, M_3, M_4 пресек паралела кроз M (из текста задатка) са страницама паралелограма $ABCD$ као на слици.
Треба доказати да мора бити тачна бар једна од релација

$$P_{AM_1MM_4} < P \ , \ P_{CM_3MM_2} < P;$$

где је са P означена четвртина површине паралелограма $ABCD$. Приметимо да баш такав закључак следи из релације

$$P_{AM_1MM_4} + P_{CM_3MM_2} < 2P.$$



Нека су O_1, O_2, O_3 и O_4 средишта страница AB, BC, CD, DA, редом. Паралелограм $ABCD$ је правама O_1O_3 и O_2O_4 разложен на четири подударна паралелограма: AO_1OO_4, BO_2OO_1, CO_3OO_2 и DO_4O_3 (O је пресек правих O_1O_3 и O_2O_4), па је сваки од њих површине P. Како тачка M не припада правама O_1O_3 и O_2O_4, то она мора припадати унутрашњости једног од ова четири паралелограма.
Ако тачка M припада паралелограму AO_1OO_4, онда је паралелограм AM_1MM_4 строги подскуп паралелограма AO_1OO_4, па је

$$P_{AM_1MM_4} < P_{AO_1OO_4} = P.$$

Слично се доказује да је $P_{CM_3MM_2} < P$ ако тачка M припада паралелограму CO_3OO_2.
Размотримо случај када тачка M припада паралелограму DO_4OO_3. Означимо површине одговарајућих паралелограма као на слици.
Приметимо да је $P_1' + P_c = P_2''$ и $P_2' + P_c = P_1''$, одакле следи $P_1' < P_2''$ и $P_2' < P_1''$. Сада имамо

$$\begin{aligned} P_{AM_1MM_4} + P_{CM_3MM_2} &= (P_1 + P_1') + (P_2 + P_2') \\ &< P_1 + P_2'' + P_2 + P_1'' \\ &= (P_1 + P_1'') + (P_2 + P_2'') \\ &= P + P = 2P, \end{aligned}$$

из чега следи тражени закључак.
Слично се доказује $P_{AM_1MM_4} + P_{CM_3MM_2} < 2P$ ако тачка M припада паралелограму BO_2OO_1.

III Комбинаторика

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**Д**	**Г**	**Б**

Задатак 4. Цифре a, c и e јединствено одређују цифре b и d. За цифре a, c, e можемо узети било које цифре такве да су задовољени услови $a \neq 0$, $a \cdot c < 10$ и $c + e < 10$. Очигледно, c може бити било која цифра, док избор цифара a и e зависи од избора цифре c.

вредност цифре c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
број избора за a	9	9	4	3	2	1	1	1	1	1
број избора за e	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
укупно бројева	90	81	32	21	12	5	4	3	2	1

Дакле, укупно има $90 + 81 + 32 + 21 + 12 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 251$ таквих бројева.