ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ПОДРУЖНИЦА МАТЕМАТИЧАРА ВАЉЕВО

МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР

ЛЕТЊЕ ШКОЛЕ МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА

„ИВАЊИЦА 2016”

ВАЉЕВО, 2016.

О ТУРНИРУ

Математички турнир Летње школе је добровољно такмичење полазника школе. Циљеви успостављања оваквог турнира, од овогодишње Летње школе, су популаризација математике кроз решавање лепих проблема, подстицање развоја здравог такмичарског духа и награђивање успешних полазника.

Формат турнира

Турнир се организује у три категорије: 3. и 4. разред, 5. и 6. разред, 7. и 8. разред. У свакој категорији решава се по 10 задатака.

У категорији 3. и 4. разред, сви задаци су са вишеструким избором са пет понуђених одговора од којих је само један тачан. Сваки тачан одговор у задацима 1–5 вреди по 8 поена, а у задацима 6–10 по 12 поена. На тесту се може освојити највише 100 поена. Време за израду задатака је 60 минута.

У категоријама 5. и 6. разред, 7. и 8. разред, задаци 1–8 су са вишеструким избором са по пет понуђених одговора од којих је само један тачан. Тачан одговор у задацима 1–4 вреди по 6 поена, а у задацима 5–8 по 9 поена. У задацима 9 и 10 нису понуђени одговори и потребно их је детаљно решити. Решење сваког од ова два задатака вреди по 20 поена. На тесту се може освојити највише 100 поена. Време за израду задатака је 90 минута.

ЗАДАЦИ

Трећи и четврти разред

1. Дат је математички ребус

$$\begin{array}{rr} & A\ A\ A \\ & B\ A\ A \\ + & B\ B\ A \\ \hline & 9\ \ 1\ \ 2 \end{array}$$

у коме истим словима одговарају исте цифре, а различитим словима различите цифре. Колико је $A \cdot B$?

(А) 4 (Б) 8 (В) 12 (Г) 16 (Д) 20 (Н) Не знам

2. Који од датих бројева не може бити написан као збир четири узастопна непарна броја?

(А) 16 (Б) 40 (В) 72 (Г) 100 (Д) 200 (Н) Не знам

3. Часовник на торњу, удара на сваки пун сат, осим у поноћ када се не огласхава, онолико пута колико је сати. Колико удараца се чује од 13 сати и 40 минута једног дана до 10 сати и 40 минута наредног дана?

(А) 229 (Б) 240 (В) 251 (Г) 253 (Д) 264 (Н) Не знам

4. Љубитељ палачинки Милан је од кувара наручио 55 палачинки. Кувар за један минут испече 5 палачинки, али док пече наредних 5 он увек поједе по 3 од претходних. Колико времена овом кувару треба да испече наручене палачинке?

(А) 11 (Б) 12 (В) 25 (Г) 26 (Д) 30 (Н) Не знам

5. На једном папиру је било записано сабирање три броја. Тај папир је нашао Миша и неке од цифара заменио звездицама. Сада тај збир изгледа овако

$$5 \star 9 + \star 55 + 19\star = 872.$$

Колики је производ бројева који недостају?

(А) 0 (Б) 8 (В) 16 (Г) 32 (Д) 40 (Н) Не знам

6. Владимир је почео да чисти (раздваја љуску од језгра) 60 ораха. Он за свака два минута очисти 3 ораха. После осам минута дошла је Љубица да му помогне и остала је док нису очистили све орахе. Колико је Љубица очистила ораха, ако она за два минута очисти 5 ораха?

(А) 28 (Б) 30 (В) 34 (Г) 38 (Д) 40 (Н) Не знам

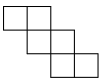
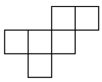
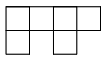
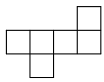
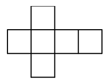
7. Колико има природних бројева мањих од 2016 чија је цифра јединица једнака 3 или 9?

(А) 201 (Б) 302 (В) 403 (Г) 504 (Д) 605 (Н) Не знам

8. У једној улици, на страни на којој се куће обележавају непарним бројевима употребљени су бројеви од 1 до 101, а на страни на којој се куће обелезхавају парним бројевима употребљени су бројеви од 2 до 94. Колико је цифара употребљено за нумерацију свих кућа у тој улици?

(А) 185 (Б) 186 (В) 187 (Г) 188 (Д) 189 (Н) Не знам

9. Од које мреже се не може направити коцка?

(А)  (Б)  (В)  (Г)  (Д) 

10. Колико има правоугаоника различитих димензија, чија је површина $48\,\mathrm{cm}^2$, а којима су мерни бројеви дужина страница у центиметрима природни бројеви?

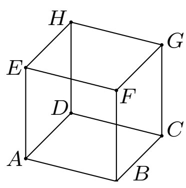
(А) 1 (Б) 2 (В) 3 (Г) 4 (Д) 5 или више (Н) Не знам

Пети и шести разред

1. Угао α комплементан је углу β, а угао β суплементан је углу γ. Колико степени има угао β ако је збир углова α, β и γ једнак 200° ?

(А) 20 (Б) 70 (В) 80 (Г) 100 (Д) 110 (Н) Не знам

2. Колико парова паралелних ивица има коцка? (На пример, један пар је AB и CD, други пар је AB и GH .)



(А) 16 (Б) 18 (В) 20 (Г) 22 (Д) 24 (Н) Не знам

3. Производ година оца и сина је 2016. Колики је збир њихових година, ако се зна да је он непаран?

(А) 69 (Б) 71 (В) 83 (Г) 95 (Д) 107 (Н) Не знам

4. Колико има природних бројева између 100 и 2016 дељивих са 3, којима су тачно три цифре једнаке?

(А) 9 (Б) 11 (В) 15 (Г) 18 (Д) 21 (Н) Не знам

5. Сви четвороцифрени бројеви који имају исте цифре као број 2017 записани су у низ у растућем поретку. Колика је најмања разлика између два суседна броја у овом низу?

   (А) 1 (Б) 9 (В) 18 (Г) 63 (Д) 99 (Н) Не знам

6. За низ бројева кажемо да је аритметички ако се сваки члан, осим првог, добија тако што се претходном члану дода један исти број. (На пример $3, 7, 11, 15, 19$ је првих пет чланова аритметичког низа.) У датој табели 5×5 сваки ред и свака колона су аритметички низови од пет чланова. Коју вредност има x?

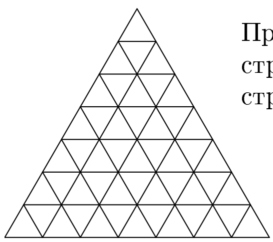
0				2
		x		
			4,95	
1,6				

   (А) 2,8 (Б) 2,95 (В) 3 (Г) 3,15 (Д) 3,3 (Н) Не знам

7. Колико има разломака са једноцифреним имениоцем који су већи од 0,75 и мањи од 0,9?

   (А) 3 (Б) 4 (В) 5 (Г) 6 (Д) 7 (Н) Не знам

8. Једнакостранични троугао странице 100 cm подељен је правама које су паралелне његовим страницама на мале једнакостраничне троуглове странице 1 cm. Колико је на овај начин добијено тих малих троуглова?



Пример поделе једнакостраничног троугла странице 7 cm на једнакостраничне троуглове странице 1 cm, начином описаним у задатку

   (А) 4500 (Б) 5000 (В) 9800 (Г) 9900 (Д) 10000 (Н) Не знам

9. Збир троцифреног и четвороцифреног броја је 5390, а збир бројева написаних истим цифрама, али у обрнутом поретку је 7982. Који су то бројеви?

10. Одредити све природне бројеве x и y такве да је $3x^2 + 2y = 159$.

Седми и осми разред

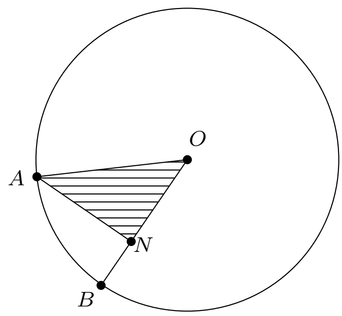
1. Никола је на седам кошаркашких утакмица бележио у просеку по 16 поена. Колико поена је постигао у осмој утакмици ако се након ње просек поена повећао за 12,5%?

(А) 18 (Б) 22 (В) 26 (Г) 30 (Д) 32 (Н) Не знам

2. Сваки становник села *Крезубја* има најмање 3 зуба. Три госта Воја, Јошка и Вељко су седели и причали вицеве. Смејући се, показали су своје зубе. Воја је рекао: "*Ја видим 11 зуба.*", Јошка је рекао: "*Ја видим 10 зуба.*", а Вељко је рекао "*Ја видим само 9 зуба.*". Колико укупно зуба имају њих тројица?

(А) 12 (Б) 13 (В) 14 (Г) 15 (Д) 16 (Н) Не знам

3. Дат је круг са центром O и полупречником 1 (види слику) и на њему тачке A и B такве да је $\angle AOB = 45°$. Тачка N је на полупречнику OB таква да је AN нормална на OB. Колика је површина осенчене фигуре?



(А) $\frac{\pi}{16}$ (Б) 1,57 (В) 0,50 (Г) 1,25 (Д) 0,25 (Н) Не знам

4. Колико најмање страница може имати конвексан многоугао који има тачно четири тупа угла?

(А) 4 (Б) 5 (В) 6 (Г) 7 (Д) 8 (Н) Не знам

5. Колико има петоцифрених бројева дељивих са 5, којима се на парним местима у запису појављују непарни бројеви?

(А) 240 (Б) 1224 (В) 2250 (Г) 3125 (Д) 4500 (Н) Не знам

6. Колики је збир најмањег и највећег природног броја који имају особину да су им при дељењу са 2016 исти количник и остатак?

(А) $2015 \cdot 2016$ (Б) $2015 \cdot 2017$ (В) $2016 \cdot 2017$ (Г) $2016 \cdot 2018$ (Д) $2017 \cdot 2018$ (Н) Не знам

7. Колико од следећих исказа је тачно?

   i) Број 1 је прост.

   ii) Пресек коцке и равни не може бити петоугао.

   iii) $\sqrt{-1} = -1$.

   iv) $\sqrt{x^{36}} = x^6$.

   v) Сви једнакокраки троуглови су слични.

   vi) Пресек коцке и равни не може бити једнакостраничан троугао.

   (А) 0 (Б) 1 (В) 2 (Г) 3 (Д) 4 (Н) Не знам

8. Колико има троуглова чија су темена темена правилног 19-оугла, а бар једна страница троугла је и страница 19-оугла?

   (А) 110 (Б) 190 (В) 285 (Г) 304 (Д) 608 (Н) Не знам

9. У скупу целих бројева решити једначину $x^2 + 2xy + 2y^2 - 10 = 0$.

10. За неки природан број n, број $520n^3$ има тачно 154 делиоца. Колико делилаца има број $48n^8$?

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

Трећи и четврти разред

Број задатка	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Тачан одоговор	**Б**	**Г**	**Б**	**Г**	**Б**	**Б**	**В**	**В**	**В**	**Д**

Пети и шести разред

Број задатка	1	2	3	4	5	6	7	8
Тачан одоговор	**Б**	**Б**	**Г**	**Д**	**Б**	**А**	**Г**	**Д**

Задатак 9. Нека су $\overline{abcd}$ и $\overline{efg}$ тражени бројеви, где различита слова могу представљати исте цифре. Тада је $\overline{abcd}+\overline{efg}=5390$, а $\overline{dcba}+\overline{gfe}=7982$. Из прве једнакости закључујемо да је $a=5$ или $a=4$. Ако би било $a=5$, онда из друге једнакости следи да је $e=7$, па би у првој једнакости при сабирању b и e било преношења и цифра хиљада у првом збиру би морала бити 6, а то је контрадикција. Значи $a=4$. Из друге једнакости следи да је $e=8$. Како је из прве једнакости $b+e=13$, то је $b=4$ или $b=5$. Ако би било $b=4$, из друге једнакости би следило да је $f=3$, а затим из прве да је $c=5$. Међутим, тада у првом сабирању не би било преноса на збир стотина па би $b+e$ било 12, а не 13, па је и то контрадикција. Значи, $b=5$. Даље се лако израчунава да је $f=2$, $c=6$, $g=3$ и $d=7$.

Задатак 10. Ако су x и y природни бројеви такви да је $3x^2+2y=159$, погледајмо шта можемо закључити о x. Прво $3x^2<159$, јер би у супротном $3x^2+2y>159$. Друго, видимо да је $3x^2<159$ само ако је $x\leq 7$ ($3\cdot 7^2=147$, $3\cdot 8^2=192$). Треће, како је $2y$ паран број (умножак двојке) и како је $3x^2+2y$ непаран, то $3x^2$ мора бити непаран, а то ће бити једино ако је x непаран број. Овим разматрањем смо дошли до тога да $x\in\{1,3,5,7\}$. Ако је $x=1$ онда је $3\cdot 1+2y=159$. Решавањем ове једначине добијамо да је $y=78$, па је $x=1$ и $y=78$ један пар тражених бројева. Слично добијамо да ће за $x=3$ и $y=66$, $x=5$ и $y=42$ или $x=7$ и $y=6$ такође важити $3x^2+2y=159$. Како су испитани сви *могући* случајеви, закључујемо да смо одредили сва решења.

Седми и осми разред

Број задатка	1	2	3	4	5	6	7	8
Тачан одоговор	**Д**	**Г**	**Д**	**Б**	**Д**	**В**	**Б**	**Г**

Задатак 9. Како је $x^2+2xy+2y^2-10 = x^2+2xy+y^2+y^2-10 = (x+y)^2+y^2-10$, то имамо да је дата једначина еквивалентна са $(x+y)^2+y^2-10=0$, тј. са $(x+y)^2+y^2=10$. Сада видимо да су $(x+y)^2$ и y^2 потпуни квадрати из N_0 чији је збир једнак 10, а то је једино могуће ако је један од њих 9, а други 1.
1. случај: $(x+y)^2=9$ и $y^2=1$.
Имамо $y=1$ или $y=-1$. Ако је $y=1$ онда $(x+1)^2=9$ па је $x+1=3$ или $x+1=-3$. Одакле добијамо $x=2$ или $x=-4$. Дакле, $y=1$ и $x=2$ је једно решење, а $y=1$ и $x=-4$ је друго решење. Ако је $y=-1$ онда $(x+(-1))^2=9$, па је $x+(-1)=3$ или $x+(-1)=-3$. Одакле добијамо $x=4$ или $x=-2$. Овим смо добили нова решења $y=-1$ и $x=4$, $y=-1$ и $x=-2$.
2. случај: $(x+y)^2=1$ и $y^2=9$.
Имамо $y=3$ или $y=-3$. Па слично као у претходном делу добијамо још четири решења: $y=3$ и $x=-2$, $y=3$ и $x=-4$, $y=-3$ и $x=4$, $y=-3$ и $x=2$. Овим су одређена сва решења дате једначине у скупу Z.

Задатак 10. Ако је a приодан број већи од 1, а $a=p_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot p_l^{k_l}$ његова фа-кторизација на различите просте чиниоце, онда је број његових делилаца једнак $(k_1+1)\cdot\ldots\cdot(k_l+1)$. Ово је чињеница која се користи у задатку. Из ње следи да природан број има мање или једнако *различитих* простих чиниоца него што број његових делилаца има *укупно* простих чинилаца. Како је $520=2^3\cdot5\cdot13$ и $154=2\cdot7\cdot11$, то закључујемо да n не сме имати простог чиниоца различитог од 2, 5 или 13, јер би у супротном број ра-зличитих простих чинилаца броја $520\cdot n^3$ био већи од 3, тј. од укупног броја простих чинилаца броја 154. Одавде добијамо да је $n=2^i\cdot5^j\cdot13^k$ за неке бројеве i,j,k из N_0. Дакле,

$$\begin{aligned} 520\cdot n^3 &= 2^3\cdot5\cdot13\cdot(2^i\cdot5^j\cdot13^k)^3 \\ &= 2^3\cdot5\cdot13\cdot2^{3i}\cdot5^{3j}\cdot13^{3k} \\ &= 2^{3+3i}\cdot5^{1+3j}\cdot13^{1+3k} \end{aligned}$$

Добијамо $154=2\cdot7\cdot11=(4+3i)\cdot(2+3j)\cdot(2+3k)$, одакле закључујемо да је $i=1$, док за j и k закључујемо да је један од њих једнак 0, а други 3. Сада је

$$\begin{aligned} 48\cdot n^8 &= 2^4\cdot3\cdot(2^1\cdot5^j\cdot13^k)^8 \\ &= 2^4\cdot3\cdot2^8\cdot5^{8j}\cdot13^{8k} \\ &= 2^{12}\cdot3\cdot5^{8j}\cdot13^{8k} \end{aligned}$$

Овим добијамо да је број делилаца броја $48\cdot n^8$ једнак $13\cdot2\cdot(8j+1)\cdot(8k+1)$. Приметимо да из $\{j,k\}=\{0,3\}$ следи $\{8j+1,8k+1\}=\{1,25\}$, па је $(8j+1)\cdot(8k+1)=1\cdot25=25$. Најзад, број делилаца броја $48\cdot n^8$ је $13\cdot2\cdot25=650$.

Издавач:
Подружница математичара Ваљево
www.dms-valjevo.org.rs

За издавача:
Вељко Ћировић

Уредник:
Сава Максимовић