ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
ПОДРУЖНИЦА МАТЕМАТИЧАРА ВАЉЕВО

# МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР

## ЛЕТЊЕ ШКОЛЕ МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА „ДИВЧИБАРЕ 2018”

**ВАЉЕВО, 2018.**

# О ТУРНИРУ

Математички турнир Летње школе је добровољно такмичење полазника школе. Циљеви успостављања овеквог турнира од Летње школе младих математичара „Ивањица 2016"су популаризација математике кроз решавање лепих проблема, подстицање развоја здравог такмичарског духа и награђивање успешних полазника.

## Формат турнира

Турнир се организује у три категорије: 3. и 4. разред, 5. и 6. разред, 7. и 8. разред. У свакој категорији решава се по 10 задатака.

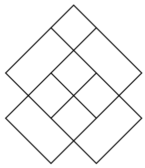
У категорији 3. и 4. разред, сви задаци су са вишеструким избором са пет понуђених одговора од којих је само један тачан. Сваки тачан одговор у задацима 1–5 вреди по 8 поена, а у задацима 6–10 по 12 поена. На тесту се може освојити највише 100 поена. Време за израду задатака је 60 минута.

У категоријама 5. и 6. разред, 7. и 8. разред, задаци 1–8 су са вишеструким избором са по пет понуђених одговора од којих је само један тачан. Тачан одговор у задацима 1–4 вреди по 6 поена, а у задацима 5–8 по 9 поена. У задацима 9 и 10 нису понуђени одговори и потребно их је детаљно решити. Решење сваког од ова два задатака вреди по 20 поена. На тесту се може освојити највише 100 поена. Време за израду задатака је 90 минута.

# ЗАДАЦИ

## Трећи и четврти разред

1. Фигура са слике је састављена од 5 подударних квадрата и 4 подударна правоугаоника. Колико има квадрата на слици?

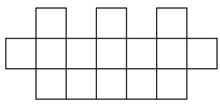


(А) 8 (Б) 9 (В) 10 (Г) 11 (Д) 12 (Н) Не знам

2. Вељков ауто потроши литар горива када пређе 18 km, а у резервоар може да стане највише 48 литара горива. Вељко је напунио пун резервоар и кренуо на пут. Када је прешао 540 km, у резервоар је долио још 20 литара горива, затим је наставио свој пут. На крају пута, резервоар је био полупун. Колико километара је дужина пута који је Вељко прешао?

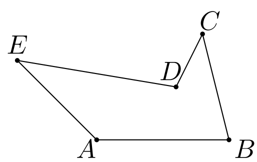
(А) 612 (Б) 648 (В) 756 (Г) 792 (Д) 828 (Н) Не знам

3. Фигура састављену од квадрата (види слику) разрезана је по линијама на најмањи могући број правоугаоника(правоугаоник може имати све странице једнаке!). Колико делова је добијено?



(А) 4 (Б) 5 (В) 6 (Г) 7 (Д) 8 (Н) Не знам

4. Мрав се креће путањом која је облика као линија на слици, не мењајући смер кретања. На пут, дужине 2 m, он креће из тачке $A$ у смеру ка тачки $B$. На којој дужи се нашао мрав на крају свог путовања, ако је $AB = 25\,\mathrm{mm}$, $BC = 2\,\mathrm{cm}$, $CD = 11\,\mathrm{mm}$, $DE = 3\,\mathrm{cm}$ и $EA = 21\,\mathrm{mm}$?




(А) $AB$ (Б) $BC$ (В) $CD$ (Г) $DE$ (Д) $EA$ (Н) Не знам

5. Вредност израза $99 - 97 + 95 - 93 + 91 - 89 + \ldots + 7 - 5 + 3 - 1$ је:

(А) 20 (Б) 40 (В) 50 (Г) 80 (Д) 100 (Н) Не знам

6. Ана сада има 10 година. Када Ана буде имала година као што сада њена мама има, њена мама ће имати 64 године. Колико сада има година Анина мама?

   (А) 32   (Б) 34   (В) 35   (Г) 37   (Д) Не може се одредити   (Н) Не знам

7. Колико има парних природних бројева којима је збир цифара 8, а производ цифара 6?

   (А) 5   (Б) 6   (В) 7   (Г) 8   (Д) Више од 8   (Н) Не знам

8. Збир бројева који недостају у датом магичном квадрату је:

| | | |
|---|---|---|
| | 2 | |
| | | 8 |
| | | 3 |

   (А) 32   (Б) 37   (В) 41   (Г) 48   (Д) 54   (Н) Не знам

9. Дат је математички ребус

$$\begin{array}{r} \text{П Е Т} \\ +\quad \text{П Е Т} \\ \hline \text{Ш Е С Т} \end{array},$$

   при чему једнаким словима одговарају једнаке цифре и различитим словима различите цифре. Колико решења има ребус?

   (А) 1   (Б) 2   (В) 3   (Г) 4   (Д) 5   (Н) Не знам

10. Правоугаоник $ABCD$ обима 60 cm подељен је са две паралелне дужи на три мања правоугаоника чију су обими 42 cm, 38 cm и 32 cm. Колико $\text{cm}^2$ износи површина правоугаоника $ABCD$?

   (А) 221   (Б) 222   (В) 223   (Г) 224   (Д) 225   (Н) Не знам

## Пети и шести разред

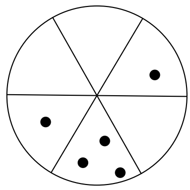
1. Наставник је поделио ученицима по један листић. На свим листићима записан је исти природан број. Затим је затражио од ученика да одсеку неколико цифара или с почетка или с краја или и с почетка и с краја. После тога је покупио неколико „остатака” листића. На тим остацима листића су били бројеви: 201, 2, 10, 102, 11, 020. Колико најмање цифара је могао имати број на листићима које је наставник поделио ученицима?

   (А) 3   (Б) 6   (В) 7   (Г) 8   (Д) 14   (Н) Не знам

2. Вредност израза $\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1+2+3+4+5+6+7+8}$ је:

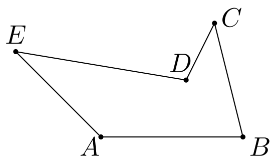
   (А) 1020   (Б) 1120   (В) 1220   (Г) 2240   (Д) 3360   (Н) Не знам

3. Послужавник кружног облика је подељен на 6 једнаких делова. У три дела су бомбоне и то 1, 1 и 3, као на слици. На послужавник се даље постављају бомбоне, али тако да колико бомбона се стави у један део послужавника, толико бомбона се мора ставити и у један његов суседни део. Који је најмањи могући број бомбона који се може наћи на послужавнику у тренутку када у сваком делу послужавника има исти број бомбона?



(А) 11 (Б) 18 (В) 24 (Г) 66
(Д) Никад неће бити исти број бомбона у свих шест делова. (Н) Не знам

4. Мрав се креће путањом која је облика као линија на слици, не мењајући смер кретања и када пређе тачку $A$ наћи ће се на дужи $AB$. На пут, дужине $2\,\mathrm{m}$, он креће из једне од означених тачака. Из које тачке је мрав кренуо, ако се на крају путовања нашао на дужи $CD$ и ако је $AB = 25\,\mathrm{mm}$, $BC = 2\,\mathrm{cm}$, $CD = 11\,\mathrm{mm}$, $DE = 3\,\mathrm{cm}$ , $EA = 21\,\mathrm{mm}$?




(А) $A$ (Б) $B$ (В) $C$ (Г) $D$ (Д) $E$ (Н) Не знам

5. Највећи природан број који се записује различитим цифрама и који је дељив са 99 има збир цифара који је једнак:

(А) 27 (Б) 36 (В) 40 (Г) 45 (Д) 54 (Н) Не знам

6. Дат је математички ребус

$$\begin{array}{r} \text{Т Р И} \\ +\quad \text{Т Р И} \\ \hline \text{Ш Е С Т} \end{array},$$

при чему једнаким словима одговарају једнаке цифре и различитим словима различите цифре. Колико решења има ребус?

(А) 5 (Б) 6 (В) 7 (Г) 8 (Д) 9 (Н) Не знам

7. Правоугаоник $ABCD$ обима $60\,\mathrm{cm}$ подељен је са две паралелне дужи на три мања правоугаоника чију су обими $42\,\mathrm{cm}$, $38\,\mathrm{cm}$ и $32\,\mathrm{cm}$. Колико $\mathrm{cm}^2$ износи површина правоугаоника $ABCD$?

(А) 221 (Б) 222 (В) 223 (Г) 224 (Д) 225 (Н) Не знам

8. Девет чланова скупштине предузећа бира директора од три кандидата. Сваки члан оцењује кандидате тако што једном даје 3 бода, другом 2 и трећем 1. Након пребројавања бодова испоставило се да сва тројица кандидата имају различит број бодова. Да су избор правили тако што свако гласа само за једног кандидата, редослед би био обрнут. Колико бодова су добили најбољи и најслабији рангирани кандидат заједно?

   (А) 34 (Б) 35 (В) 36 (Г) 37 (Д) 38 (Н) Не знам

9. Ако Лена поклони Нини 123 динара, онда ће обе имати једнаке суме новца. Ако Нина поклони Лени 123 динара, онда ће Лена имати два пута више новца од Нине. Колико новца има Лена, а колико Нина?

10. Дати су непразни скупови $A$ и $B$ такви да је

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \text{ и } A \cap B = \emptyset$$

Ако је $a$ производ елемената скупа $A$ и $b$ производ елемената скупа $B$, одреди најмањи природан број који може бити једнак $a : b$.

## Седми и осми разред

1. Колико решења има једначина $pqr + pq + p = 82$, где су $p$, $q$ и $r$ различити прости бројеви?

   (А) 1 (Б) 2 (В) 3 (Г) 4 (Д) 5 (Н) Не знам

2. Угао код темена $C$ конвексног четвороугла $ABCD$ је величине $100°$. Дијагонала $AC$ дели четвороугао $ABCD$ на један једнакостранични и један једнакокраки троугао. Колико највише степени може бити разлика највећег и најмањег угла четвороугла $ABCD$?

   (А) 40 (Б) 70 (В) 100 (Г) 120 (Д) 130 (Н) Не знам

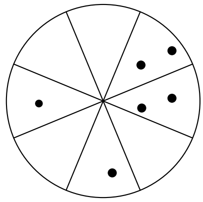
3. Који од наведених бројева има средњу, по величини, вредност?

   (А) $\sqrt{8} + \sqrt{15}$ (Б) $\sqrt{5} + \sqrt{18}$ (В) $\sqrt{10} + \sqrt{13}$
   (Г) $\sqrt{11} + \sqrt{12}$ (Д) $3 + \sqrt{14}$ (Н) Не знам

4. Квадрат $ABCD$ је подељен на подударне правоугаонике помоћу три праве, од којих је свака паралелна са неком страницом квадрата. Ако је једна страница правоугаоника дужине 2, који од понуђених бројева не може бити једнак дужини странице квадрата $ABCD$?

   (А) 2 (Б) 4 (В) 6 (Г) 8 (Д) 10 (Н) Не знам

5. Послужавник кружног облика је подељен на 8 једнаких делова. У четири дела су бомбоне и то 1, 1, 2 и 2, као на слици. На послужавник се даље постављају бомбоне, али тако да колико бомбона се стави у један део послужавника, толико бомбона се мора ставити и у један његов суседни део. Који је најмањи могући број бомбона који се може наћи на послужавнику у тренутку када у сваком делу послужавника има исти број бомбона?



(А) 11 (Б) 16 (В) 24 (Г) 88 (Д) Никад неће бити исти број бомбона у свих осам делова. (Н) Не знам

6. Колико има тупоуглих троуглова са целобројним страницама, таквих да су дужине две од три странице једнаке 6 и 8?

(А) 3 (Б) 5 (В) 6 (Г) 7 (Д) Више од 7 (Н) Не знам

7. У троуглу $ABC$ важи да је $AB = 3$, $BC = 4$ и $CA = 5$. На страници $AC$ дата је тачка $D$ таква да су троуглови $ABD$ и $BCD$ истог обима. Површина троугла $BCD$ је:

(А) $\frac{3}{4}$ (Б) $\frac{3}{2}$ (В) 2 (Г) $\frac{12}{5}$ (Д) $\frac{5}{2}$ (Н) Не знам

8. Колико има потпуних кубова мањих од $6^9$ и не мањих од $8^7$?

(А) 1 (Б) 8 (В) 87 (Г) 88 (Д) 115 (Н) Не знам

9. Докажи да ако је природан број $2n$ једнак збиру квадрата два цела броја, онда је и природан број $n$ једнак збиру квадрата два цела броја.

10. Нека је $S(k)$ збир цифара природног броја $k$. Одреди најмањи природан број $n$ такав да је

$$S(n-1) + S(n+1) = 2018 \quad .$$

# РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

## Трећи и четврти разред

| Број задатка | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Тачан одоговор | **Г** | **Г** | **Б** | **Г** | **В** | **Г** | **А** | **В** | **В** | **А** |

## Пети и шести разред

| Број задатка | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Тачан одоговор | **Б** | **Б** | **Д** | **Д** | **Г** | **Д** | **А** | **В** |

**Задатак 9.** Из прве реченице задатка закључује се да Лена има $2 \cdot 123 = 246$ динара више него Нина. Из друге реченице задатка пре свега се закључује да Нина има више од 123 динара, па можемо записати Нинину суму новца са $y + 123$, а Ленину са $y + 123 + 246 = y + 369$. Сада, исказ из друге реченице може да се запише једнакошћу $2y = y + 369 + 123$, одакле добијамо да је $y = 369 + 123 = 492$. Дакле, Нина има $492 + 123 = 615$ динара, а Лена $615 + 246 = 861$ динар.

**Задатак 10.** Како су $a$ и $b$ природни бројеви, то је $a : b$ природан број једино ако су сви прости чиниоци броја $b$ уједно и прости чиниоци броја $a$ и у том случају количник је једнак производу свих простих чинилаца броја $a$ који нису прости чиниоци броја $b$ (овде се у појам простог чиниоца укључује и бројност простих делилаца). Како ни један дати број (од 1 до 10) сем 7 нема прост чинилац 7, то да би $a : b$ био природан број мора да $7 \in A$. Сада, како је 7 прост чинилац броја $a$ и није прост чинилац броја $b$, следи да је 7 прост чинилац броја $a : b$, па $a : b \geq 7$. Ако $A = \{1, 2, 9, 4, 10, 7\}$ и $B = \{3, 6, 5, 8\}$, онда $a : b = 7$.
Дакле, 7 је најмањи природан број који може бити једнак $a : b$.

# Седми и осми разред

| Број задатка | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Тачан одоговор | **А** | **Г** | **Д** | **Д** | **Д** | **В** | **Г** | **Г** |

**Задатак 9.** Ако је $2n = p^2 + q^2$, онда је $n$ једнако

$$\begin{aligned}
\frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} &= \frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{4} \\
&= \left(\frac{p}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot \frac{q}{2} + \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot \frac{q}{2} + \left(\frac{q}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-q}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Како је $p^2 + q^2$ паран, то су $p^2$ и $q^2$ исте парности; па су $p$ и $q$ исте парности; па су $p+q$ и $p-q$ парни бројеви; па су $\dfrac{p+q}{2}$ и $\dfrac{p-q}{2}$ цели бројеви. Дакле, $n$ је збир квадрата два цела броја.

**Задатак 10.**
1. случај: Цифра јединица броја $n-1$ је мања од 8.
Тада је, $S(n+1) = S(n-1) + 2$, па је $S(n-1) + S(n-1) + 2 = 2018$, тј. $S(n-1) = 1008$. Имајући у виду да је $9 \cdot 112 = 1008$, закључујемо да је $29\ldots97$ (111 деветки) најмањи природан број чија је цифра јединица мања од 8 и чији је збир цифара једнак 1008. Дакле, $n$ је број $29\ldots98$ који има 113 цифара.
2. случај: Цифра јединица броја $n-1$ је 8 или 9.
Тада је $S(n-1) = S(n+1) + 7 + 9k$, где је $k \in \mathbb{N}_0$ број узастопних деветки у броју $n-1$ почевши од позиције дестина ка вишим позицијама. Сада имамо $S(n-1) + S(n-1) - (7+9k) = 2018$, тј.

$$S(n-1) = 1009 + \frac{7+9k}{2}$$

Па видимо да $k$ мора бити непаран број и да је $S(n-1) \geq 1017$. Како је $9 \cdot 113 = 1017$, закључујемо да $n$ има бар 114 цифара.
Дакле, најмањи природни број $n$ за који важи $S(n–1) + S(n+1) = 2018$ је број $2\underbrace{9\ldots9}_{111}8$.

Издавач:

*Подружница математичара Ваљево*
www.dms-valjevo.org.rs

За издавача:

*Вељко Ћировић*

Уредник:

*Сава Максимовић*