ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
ПОДРУЖНИЦА МАТЕМАТИЧАРА ВАЉЕВО

МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР

ЛЕТЊЕ ШКОЛЕ МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА „ДИВЧИБАРЕ 2019”

ВАЉЕВО, 2019.

О ТУРНИРУ

Математички турнир Летње школе је добровољно такмичење полазника школе. Циљеви успостављања оваквог турнира од Летње школе младих математичара „Ивањица 2016" су популаризација математике кроз решавање лепих проблема, подстицање развоја здравог такмичарског духа и награђивање успешних полазника.

Формат турнира

Турнир се организује у три категорије: 3. и 4. разред, 5. и 6. разред, 7. и 8. разред. У свакој категорији решава се по 10 задатака.

У свакој категорији, задаци 1–8 су са вишеструким избором са по пет понуђених одговора од којих је само један тачан. Тачан одговор у задацима 1–4 вреди по 6 поена, а у задацима 5–8 по 9 поена. У задацима 9 и 10 нису понуђени одговори и потребно их је детаљно решити. Решење сваког од ова два задатака вреди по 20 поена. На тесту се може освојити највише 100 поена. Време за израду задатака је 90 минута.

ЗАДАЦИ

Трећи и четврти разред

1. Првих седам бројева низа су 1, 2, 4, 8, 16, 22, 24. Сваки наредни број у низу се добија када се претходном дода његова цифра јединица. Који је десети број у низу?

   (А) 26 (Б) 28 (В) 36 (Г) 42 (Д) 48 (Н) Не знам

2. Вредност израза $2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 + 1) + 1) + 1) + 1) + 1) + 1$ је:

   (А) 70 (Б) 97 (В) 127 (Г) 159 (Д) 729 (Н) Не знам

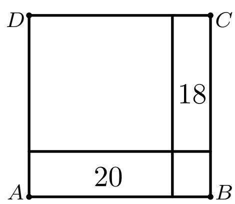
3. Колико минута пре 8 сати у школу стиже ученик који је од куће кренуо 12 минута после 7 сати, а од куће до школе му треба 12 минута?

   (А) 12 (Б) 24 (В) 36 (Г) 48 (Д) 84 (Н) Не знам

4. Пет пачића хода иза мајке патке поређани по годинама, од најстаријег до најмлађег. Између Дрине и Саве нема других пачића, Колубара је у реду иза Мораве, али испред Саве. Сава је испред Дунава. Како се зове најмлађе паче?

   (А) Дрина (Б) Сава (В) Колубара (Г) Морава (Д) Дунав (Н) Не знам

5. Квадрат је разложен на четири правоугаоника као на слици. Бројеви на слици изражавају обиме одговарајућих правоугаоника у центиметрима. Ако је a природан број који изражава страницу квадрата у милиметрима, онда ја збир цифара броја a једнак:



   (А) 10 (Б) 12 (В) 13 (Г) 14 (Д) 15 (Н) Не знам

6. Четрнаест столица је у једном реду. Колико највише људи може да седне на те столице тако да поред сваке особе буде слободна столица.

   (А) 6 (Б) 7 (В) 8 (Г) 9 (Д) 10 (Н) Не знам

7. Ако запишемо све природне бројеве од 17 до 385, колико пута ћемо написати цифру 3?

   (А) 86 (Б) 142 (В) 163 (Г) 172 (Д) више од 172 (Н) Не знам

8. Мира и Маја су рођене истог датума али различитих година. Прошле године, Мира је била пет пута старија од Маје. Ове године, Мира је старија од Маје онолико пута колико сада Маја има година. Колико година је Мира старија од Маје?

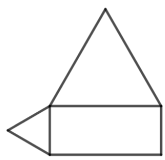
   (А) 3 (Б) 5 (В) 9 (Г) 12 (Д) 15 (Н) Не знам

9. Сека има четири пута више новца од бате. Ако сека да бати 178 динара, она ће имати само два пута више новца од бате. Колико новца има бата, а колико сека?

10. Вељко и Драган су на пијаци купили 5 лубеница од којих свака има исту цену. Вељко је платио 3 лубенице, а Драган 2 лубенице. Тада им се прикључио Горан и сва тројица поједу свих 5 лубеница, при чему је сваки појео исту количину. Горан остави 200 динара за свој део и оде. Како ће Вељко и Драган да поделе тих 200 динара?

Пети и шести разред

1. Шестоугао је формиран од једног правоугаоника и два једнакостранична троугла, која су конструисани над двема суседним страницама правоугаоника (види слику). Колико пута је обим шестоугла већи од обима правоугаоника?



   (А) 0,5 (Б) 0,75 (В) 1,5 (Г) 2 (Д) 3 (Н) Не знам

2. Колико има петоцифрених бројева дељивих са 4 који се исто читају с лева и с десна?

   (А) 144 (Б) 200 (В) 240 (Г) 400 (Д) 4000 (Н) Не знам

3. Ако је несводљиви разломак $\frac{p}{q}$ једнак вредности израза $2 \cdot A + 8 : 9 - \frac{1}{B}$, где је $A = \dfrac{2 - 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4}}{0,001 : 0{,}0005 + 2 \cdot 0,125}$ и $B = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}}$, онда се бројеви p и q разликују за:

   (А) 7 (Б) 10 (В) 13 (Г) 15 (Д) 17 (Н) Не знам

4. Производ више од два узастопна непарна броја се завршава цифром 9. Колико најмање чинилаца има тај производ?

(А) 3 (Б) 4 (В) 5 (Г) 6 (Д) 7 (Н) Не знам

5. У једној држави има 11 градова. Из сваког града полази шест различитих путева ка шест различитих градова. Колико путева, који повезују два града, има у тој држави?

(А) 66 (Б) 33 (В) 22 (Г) 132 (Д) 36 (Н) Не знам

6. У једној групи ђака однос девојчица и дечака је 8:7. На излет је отишло $\frac{3}{4}$ од свих девојчица и $\frac{3}{5}$ од свих дечака. Који проценат од свих ђака те групе је отишао на екскурзију?

(А) 67 (Б) $67{,}5$ (В) 68 (Г) $68{,}5$ (Д) 69 (Н) Не знам

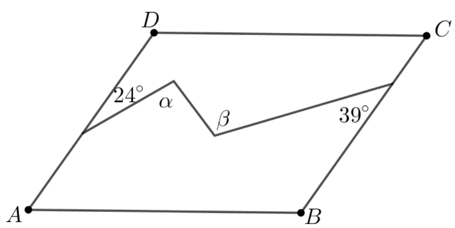
7. Који од следећих бројева није прост?

(А) $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2-1$ (Б) $3\cdot 7\cdot 13-9-7$ (В) $99+100$ (Г) $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7+1$ (Д) $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7-1$ (Н) Не знам

8. Ако је n најмањи природан број такав да разломак $\dfrac{24}{n}$ има тачно три децимале од којих је последња различита од нуле, онда је збир цифара броја n?

(А) 5 (Б) 6 (В) 8 (Г) 9 (Д) 10 (Н) Не знам

9. $ABCD$ је паралелелограм(види слику). Одреди мере углова α и β , ако је њихов збир $207°37'$.



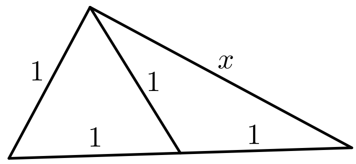
10. Ако је $\begin{array}{rcccc} & & \text{Ш} & \text{У} & \text{Т} \\ & & \text{Г} & \text{О} & \text{Л} \\ + & & \text{В} & \text{А} & \text{Р} \\ \hline & 2 & 0 & 1 & 9 \end{array}$, одреди све могуће вредности збира

$$\text{ПУТ} + \text{ПОЛ} + \text{ПАР},$$

при чему једнаким словима одговарају једнаке цифре и различитим словима различите цифре.

Седми и осми разред

1. Одреди дужину x са слике?



(А) 1 (Б) $\sqrt{2}$ (В) $\sqrt{3}$ (Г) 2 (Д) $\sqrt{5}$ (Н) Не знам

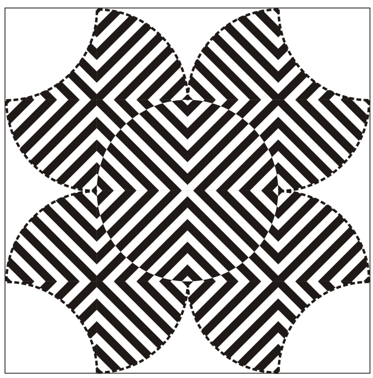
2. Колико има троцифрених бројева чији производ цифара једнак производу прве и последње цифре?

(А) 9 (Б) 90 (В) 99 (Г) 171 (Д) 180 (Н) Не знам

3. Колика је вредност разломака $\dfrac{2\cdot 3+4\cdot 6+6\cdot 9+\ldots+2000\cdot 3000}{3\cdot 5+6\cdot 10+9\cdot 15+\ldots+3000\cdot 5000}$?

(А) 1 (Б) $\dfrac{2}{3}$ (В) $\dfrac{2}{5}$ (Г) $\dfrac{3}{5}$ (Д) ни један од наведених (Н) Не знам

4. На папиру квадратног облика налази се црно-бели цвет који додирује ивице папира (види слику). Маша жели да маказама изреже цвет и залепи га у свеску. Проценат дела папира који Маша треба да одстрани приближно је једнак:



(А) 25% (Б) 28% (В) 29% (Г) 30% (Д) 31% (Н) Не знам

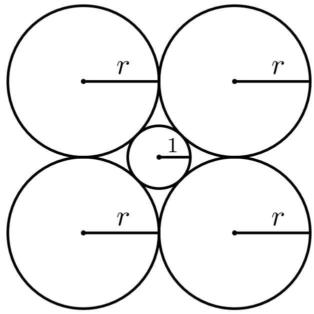
5. Гледајући с краја, која је прва ненула цифра броја $(20! - 15!)$?

(А) 2 (Б) 4 (В) 5 (Г) 6 (Д) 8 (Н) Не знам

6. Колики је збир цифара најмањег природног броја који се не може записати као збир два палиндрома? (Палиндроми су природни бројеви који се читају исто с десна и с лева. Примери палиндрома су 3, 44, 121.)

(А) 2 (Б) 3 (В) 5 (Г) 7 (Д) 11 (Н) Не знам

7. Круг полупречника 1, споља додирују четири круга полупречника r као на слици. Одреди r?



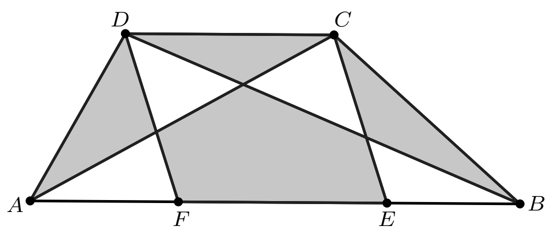
(А) 2 (Б) $1+\sqrt{2}$ (В) 3 (Г) $2+\sqrt{2}$ (Д) $2+2\sqrt{2}$ (Н) Не знам

8. Колико има шестоцифрених бројева написаних помоћу цифра 1, 2, 3, 4, 5, 6 у којима се цифре не понављају и у којима цифре 5 и 6 нису суседне?

(А) 480 (Б) 540 (В) 600 (Г) 720 (Д) више од 720 (Н) Не знам

9. Нека је $a = 1 + \frac{x}{y}$ и $b = 1 + \frac{y}{x}$, где су x и y позитивни реални бројеви. Ако је $a^2 + b^2 = 15$, израчунај $a^3 + b^3$.

10. На основици AB трапеза $ABCD$ изабране су тачке E и F такве да $CE \parallel DF$ (види слику). Докажи да је површина осенченог петоугла једнака збиру површина три осенчена троугла.

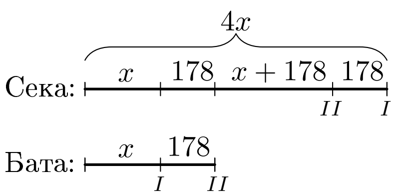


РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

Трећи и четврти разред

Број задатка	1	2	3	4	5	6	7	8
Тачан одоговор	**Г**	**В**	**В**	**Д**	**Г**	**Г**	**В**	**Г**

Задатак 9. Решавајући задатак методом дужи, добијамо следећи цртеж



Из секине дужи видимо да је $4x = 2x + 3 \cdot 178$, тј. $2x = 534$, одакле добијамо $x = 534 : 2 = 267$. Значи, бата има 267 динара, а сека има $4 \cdot 267 = 1068$ динара.

Задатак 10. Како је Горанов део 200 динара, то је свачији део 200 динара, тј. 5 лубеница кошта 600 динара, па једна лубеница кошта $600 : 5 = 120$ динара. Дакле, када су куповали лубеницу, Вељко је дао $3 \cdot 120 = 360$ динара, што значи да је дао $360 - 200 = 160$ динара више него што је његов део, па он треба да узме 160 динара од Горанових 200 динара; Драган узима $200 - 160 = 40$ динара.

Пети и шести разред

Број задатка	1	2	3	4	5	6	7	8
Тачан одоговор	**В**	**Б**	**А**	**Б**	**Б**	**В**	**Д**	**Д**

Задатак 9. Права паралелна са AD која садржи теме угла α дели угао α на углове мера 24° (углови на трансвезали) и x, а права паралелна са AD која садржи теме угла β дели угао β на углове мера x и 39° (углови на трансвезали). Сада имамо да је $2x + 24^\circ + 39^\circ = 207^\circ 37'$, одакле се добија $x = 72^\circ 18' 30''$, а затим и $\alpha = \ 96^\circ 18' 30''$ и $\beta = 111^\circ 18' 30''$.

Задатак 10. Означимо са z_1 збир цифара Т, Л, Р, са z_2 збир цифара У, О, А, са z_1 збир цифара Ш, Г, В и са z збир бројева z_1, z_2, z_3. Како различитим словима одговарају различите цифре, добијамо да је сваки од бројева z_1, z_2, z_3 већи од 1 и мањи од 25, да је број z мањи или једнак од $0 + 1 + \ldots + 9 = 45$ и да је цифра П једнака $45 - z$. Даље закључујемо да је $18 \leq z_3 \leq 19$, као и да је $z_1 = 9$ или $z_1 = 19$. Ако је $z_1 = 19$, онда је z_2 једнако или 10 или 20, па је $z \geq 18 + 19 + 10 = 47$, што је нетачно. Ако је $z_1 = 9$, онда је z_2 једнако или 11 или 21. Ако је $z_2 = 21$, онда је $z \geq 18 + 9 + 21 = 48$, што је нетачно.

Дакле, ако постоји дешифровање слова које испуњава услове задатка, онда су бројеви z_1, z_2, z_3 једнаки $9, 11, 19$, редом. Тиме добијамо да слово П једино може бити једнако $45-39=6$, а тражени збир једино може бити једнак 1919. Једно дешифрвање које испуњава услове задатка је на пример:

$$\text{Т}=0, \text{Л}=4, \text{Р}=5, \text{У}=1, \text{О}=3, \text{А}=7, \text{Ш}=2, \text{Г}=8, \text{В}=9.$$

Седми и осми разред

Број задатка	1	2	3	4	5	6	7	8
Тачан одоговор	**В**	**Г**	**В**	**Г**	**А**	**Б**	**Б**	**А**

Задатак 9. $a^3+b^3=50$.
Из $a^2+b^2=15$ добијамо

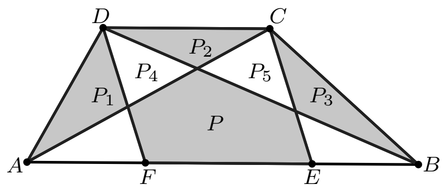
$$2+2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{y}{x}\right)^2=15\,,$$

што је еквивалентно са $\left(1+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2=16$, имајући у виду да је $\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}=1$. Како су x и y позитивни, закључујемо да је

$$1+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=4\,.$$

Даље, $a^3+b^3=(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)$, $a+b=2+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=5$ и $a\cdot b=2+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=5$, па добијамо $a^3+b^3=5\cdot(15-5)=50$.

Задатак 10. Прво уведимо ознаке за неке од површине као на слици.



У уведеним ознакама, треба доказати да је $P=P_1+P_2+P_3$. Приметимо да троуглови CDA и CDB, као и паралелограм $CDFE$ имају исту страницу (CD) и њој одговарајућу висину (висина трапеза), па закључујемо да је $P_{CDA}=P_{CDB}=\frac{1}{2}P_{CDFE}$, из чега следи

$$P_{CDFE}=P_{CDA}+P_{CDB}\,.$$

Последњу једнакост, на основу уведених ознака за површине, можемо записати са

$$P+P_2+P_4+P_5=(P_1+P_2+P_4)+(P_2+P_3+P_5)\,.$$

Након сређивање последње једнакости добијамо $P=P_1+P_2+P_3$.

Издавач:

Подружница математичара Ваљево
www.dms-valjevo.org.rs

За издавача:

Вељко Ћировић

Уредник:

Сава Максимовић