ПОДРУЖНИЦА МАТЕМАТИЧАРА ВАЉЕВО
ВАЉЕВСКА ГИМНАЗИЈА

ИНТЕГРАЛ КУП 2020

Online, 28. новембар 2020.

ФОРМАТ И БОДОВАЊЕ

Задаци на турниру су подељени у три целине:

I Алгебра и бројеви, II Геометрија и III Комбинаторика.

У свакој целини дата су три задатка са вишеструким избором и један задатак који је потребно детаљно решити.

Задаци са вишеструким избором вреде по 5 поена, док задаци који се детаљно решавају вреде по 10 поена.

У сваком задатаку са вишеструким избором понуђено је пет одговора (**А**, **Б**, **В**, **Г**, **Д**) од којих је само један тачан и одговор **Н** (не знам).

Заокруживање само одговора **Н** не доноси ни негативне ни позитивне поене.

У случају заокруживања нетачног одговора или заокруживања више од једног одговора, као и у случају да се не заокружи ни један одговор, добија се **-1** поен.

Време за израду задатака је 150 минута.

6. РАЗРЕД

I Алгебра и бројеви

1. Који број се добија када се 40 подели са $\frac{1}{2}$ и од резултата одузме -10?

   (А) 10 (Б) 30 (В) 50 (Г) 70 (Д) 90 (Н) Не знам

2. Вредност израза $-2 \cdot (-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - \ldots + 2020)$ је

   (А) -1010 (Б) -2020 (В) 1010 (Г) -4040 (Д) 2020 (Н) Не знам

3. Збир неколико (бар два) узастопних простих бројева је највећи двоцифрени прост број. Први од тих бројева може бити

   (А) 2 (Б) 7 (В) 13 (Г) 29 (Д) 37 (Н) Не знам

4. Може ли се из скупа $\{-8, -7, -6, \ldots, 7, 8, 9\}$ изоставити један елемент тако да се елементи новог скупа могу поделити на два подскупа који немају заједничких елемента, при чему је производ бројева у сваком од та два подскупа једнак?

II Геометрија

1. Симетрале унутрашњих углова на основици једнакокраког троугла ABC ($AC = BC$) секу се под углом 118°. За странице троугла ABC важи

   (А) $AB < AC$ (Б) $AB = AC$ (В) $AB > AC$ (Г) $AB = 2 \cdot BC$ (Д) $3 \cdot AB = 2 \cdot BC$ (Н) Не знам

2. Симетрале спољашњих углова код темена A и B троугла ABC секу се под углом од 56°. Угао ACB је једнак

   (А) 124° (Б) 68° (В) 56° (Г) 34° (Д) 62° (Н) Не знам

3. Колико има неподударних једнакокраких троуглова обима 41 cm којима се дужине страница изражавају целим бројем центиметара? (Два троугла су подударна ако имају међусобно исте странице.)

   (А) 9 (Б) 10 (В) 11 (Г) 19 (Д) 41 (Н) Не знам

4. У троуглу ABC је $\measuredangle BAC = 78^\circ$ и тачка M припада страници BC, при чему важи да су ABM и ACM једнакокраки троуглови. Одреди углове троугла ABC. Наћи сва решења.

III Комбинаторика

1. Дато је 12 тачака које припадају страницама троугла ABC тако да се њих 3 налазе на страници AB, њих 4 на страници AC и њих 5 на страници BC. Колико троуглова може да се формира од датих тачака као темена, тако да различита темана припадају различитим страницама троугла ABC ?

   (А) 60 (Б) 120 (В) 220 (Г) 12 (Д) 72 (Н) Не знам

2. Четвороцифрених бројева којима је производ цифара једнак 0 има

   (А) 1800 (Б) 2100 (В) 2439 (Г) 3000 (Д) 4321 (Н) Не знам

3. У једној кутији се налазе 4 црне куглице, у другој кутији су 4 беле куглице и у трећој кутији су 2 беле и 2 црне куглице. Које је боје куглица видимо тек кад је извучемо из кутије и при томе не знамо у којој кутији су какве куглице. Који је најмањи број од којег сигурно не треба више куглица извући да би установили у којој кутији су какве куглице (куглице се након извлачења не враћају у кутије)?

   (А) 3 (Б) 4 (В) 5 (Г) 6 (Д) 7 (Н) Не знам

4. Допуни магични квадрат (збир бројева по свакој врсти, колони и дијагонали треба да буде исти) и образложи решење.

	$\frac{2}{5}$	
0,7		$\frac{1}{2}$

7. И 8. РАЗРЕД

I Алгебра и бројеви

1. Нека су a и b природни бројеви такви да је $\sqrt{32\sqrt{128}} = a\sqrt{\sqrt{b}}$ и b је најмањи са тим својством. Колико је $a : b$?

   (А) 1 (Б) 2 (В) 4 (Г) 8 (Д) 16 (Н) Не знам

2. Колико решења у скупу целих бројева има једначина $x^2 + 5y = 12345678$?

   (А) 0 (Б) 1 (В) 2 (Г) 3 (Д) Више од 3 (Н) Не знам

3. Колико има уређених тројки (a, b, c) реалних бројева a, b и c за које важи $ab = c$, $bc = a$ и $ca = b$?

   (А) 1 (Б) 2 (В) 3 (Г) 4 (Д) Више од 4 (Н) Не знам

4. Након пола сата вожње бициклиста је прешао $15\,\mathrm{km}$ и схватио да ће, ако настави да вози истом просечном брзином, стићи на хуманитарни скуп са сат времена закашњења. Зато је бициклиста повећао своју просечну брзину за $10\,\mathrm{km/h}$ и на скуп стигао $15\,\mathrm{min}$ раније. Колико је кућа бициклисте удаљена од места на ком се одржава хуманитарни скуп?

II Геометрија

1. Једна основица трапеза је три пута већа од друге, а површина трапеза је 80. Средња линија трапеза разлаже трапез на две фигуре. За колико се разликују површине те две фигуре?

   (А) 10 (Б) 16 (В) 20 (Г) 30 (Д) 40 (Н) Не знам

2. Дат је квадрат $ABCD$ странице 4 и тачка E ван квадрата таква да је $CE = DE$ и $\measuredangle CED = 90°$. Дужина дужи AE је

   (А) $4\sqrt{2}$ (Б) $2\sqrt{10}$ (В) $2\sqrt{6}$ (Г) 6 (Д) $6\sqrt{2}$ (Н) Не знам

3. Крак једнакокраког троугла је 7, а пречник описане кружнице је 25. Колика је основица тог једнакокраког троугла?

   (А) 11 (Б) 12,33 (В) 13,44 (Г) 14,55 (Д) 15 (Н) Не знам

4. Мердевине дужине $10\,\mathrm{m}$ наслоњене су на зид. Средиште мердевина је дупло више удаљено од пода него од зида. На којој висини зида су мердевине наслоњене?

III Комбинаторика

1. У перници су оловке које се једино по боји разликују. Међу њима има црвених, зелених, плавих, жутих и црних. Колико најмање њих треба извадити да бисмо без гледања били сигурни да међу њима има три оловке исте боје?

   (А) 3 (Б) 6 (В) 11 (Г) 15 (Д) 16 (Н) Не знам

2. Природних бројева n, $100 \leq n < 10000$ код које су тачно три цифре једнаке има

   (А) 306 (Б) 315 (В) 324 (Г) 333 (Д) 342 (Н) Не знам

3. У координатној равни дате су тачке $A(-2,0)$, $B(-1,0)$, $C(0,0)$, $D(1,0)$, $E(2,0)$, $F(0,-1)$ и $G(0,1)$. Колико троуглова одређују ове тачке?

   (А) 15 (Б) 16 (В) 24 (Г) 30 (Д) 36 (Н) Не знам

4. Колико има десетоцифрених бројева код којих је производ цифара нула, ако се цифре: а) могу понављати; б) не могу понављати?

1. И 2. РАЗРЕД

I Алгебра и бројеви

1. Са колико нула се завршава број $16^5 \cdot 5^{16} + 4^{25} \cdot 25^4$?

   (А) 4 (Б) 5 (В) 8 (Г) 15 (Д) 16 (Н) Не знам

2. Ако је S скуп свих троцифрених природних бројева који су дељиви са 12 и имају тачно 12 делилаца, колико скуп S има елемената?

   (А) 12 (Б) 17 (В) 19 (Г) 20 (Д) 21 (Н) Не знам

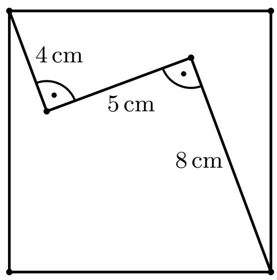
3. Колики је збир реалних бројева x и y за које важи $5x^2 + 8xy + 8y^2 \leq 12x - 12$?

   (А) $-5{,}8$ (Б) -1 (В) 0 (Г) 1 (Д) 1,25 (Н) Не знам

4. Доказати да постоји бесконачно уређених тројки природних бројева (x, y, z) за које важи $5^x - 5^y = z^2$.

II Геометрија

1. Површина квадрата са слике је



   (А) $42{,}25\,\mathrm{cm}^2$ (Б) $64\,\mathrm{cm}^2$ (В) $72{,}25\,\mathrm{cm}^2$ (Г) $81\,\mathrm{cm}^2$ (Д) $84{,}50\,\mathrm{cm}^2$ (Н) Не знам

2. Тачка E је средиште странице BC правоугаоника $ABCD$. Ако је $AB = 2$, а права DE тангента кружнице над пречником AB, онда је BC једнако

   (А) 1 (Б) 2 (В) $\sqrt{2}$ (Г) $\frac{4}{3}$ (Д) $\frac{5}{4}$ (Н) Не знам

3. Нека су E, F, G и H средишта страница AB, BC, CD и DA, редом, конвексног четвороугла $ABCD$, а I пресек дужи EG и FH. Ако су површине четвороуглова $AEIH$, $BFIE$ и $CGIF$ једнаке 8, 16 и 20, редом, колика је површина четвороугла $DHIG$?

   (А) 28 (Б) 12 (В) 4 (Г) 40 (Д) 10 (Н) Не знам

4. Мерни бројеви страница правоуглог троугла су природни бројеви. Може ли обим тог троугла бити једнак 2020-ом степену неког природног броја?

III Комбинаторика

1. Колико има уређених парова са целобројним координатама у скупу $[\pi, 3\pi]\times[2\pi, 8\pi]$?

   (А) 54 (Б) 57 (В) 90 (Г) 108 (Д) 114 (Н) Не знам

2. Дигитални часовник показује време $h : m : s$ где су h, m и s цели бројеви такви да $0 \leq h \leq 23$, $0 \leq m \leq 59$ и $0 \leq s \leq 59$. Колико пута ће часовник у току једног дана показати време $h : m : s$ за које важи $h + s = m$?

   (А) 1104 (Б) 1127 (В) 1152 (Г) 1164 (Д) 1770 (Н) Не знам

3. На страницама AB, BC и CA троугла ABC дато је редом 3, 4 и 5 тачака које су различите од темена троугла. Број свих троуглова чија су темена неке три од датих тачака је

   (А) 60 (Б) 135 (В) 175 (Г) 205 (Д) 350 (Н) Не знам

4. Одредити број начина на који се бројеви $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ и 9 могу поређати у поља табеле 3×3 тако да збир бројева по свакој врсти, колони и дијагонали буде дељив са 3.

РЕШЕЊА

6. разред

I Алгебра и бројеви

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**Д**	**Б**	**Г**

Задатак 4. Из датог скупа изоставићемо нулу и преостале елементе поделити у два скупа $A = \{-1,-2,-3,-4,-5,-6,-7,-8,3\}$ и $B = \{1,2,4,5,6,7,8,9\}$ (приметимо да A и B немају заједничких елемената и да им је унија једнака датом скуп без нуле). Означимо са a и b производе елемената скупова A и B, редом. Како је

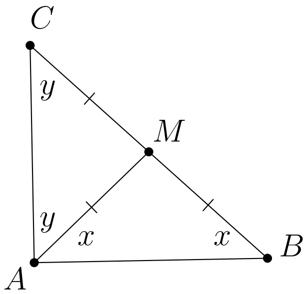
$$\begin{aligned} a &= (-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-5)\cdot(-6)\cdot(-7)\cdot(-8)\cdot 3 \\ &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 3 \\ &= 1\cdot 2\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 \quad \text{(помножили трећи и последњи чинилац)} \\ &= b\,, \end{aligned}$$

то добијамо да је $a = b$, па је одговор на постављено питање је потврдан.

II Геометрија

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**А**	**Б**	**Б**

Задатак 4. Ако су AB и AC основице једнакокраких троуглова ABM и ACM, редом, онда је $\measuredangle BAC = 90^\circ$.

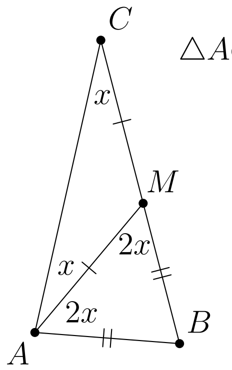


$x + x + y + y = 180^\circ$ (збир ун. углова троугла ABC)

$x + y = 90^\circ$ тј. $\measuredangle BAC = 90^\circ$

Како је у задатку дато да је $\measuredangle BAC = 78^\circ$, закључујемо да не могу истовремено AB и AC бити основице једнакокраких троуглова ABM и ACM, редом.
Углови AMB и AMC су суплементни и не може бити $\measuredangle AMB = \measuredangle AMC = 90^\circ$ (јер би тада AB и AC биле основице једнакокраких троуглова ABM и ACM, редом), па су преостала следећа два случаја:

1° : $\measuredangle AMB$ је оштар и $\measuredangle AMC$ је туп. Закључујемо да је AC основица једнакокраког троугла AMC, па основице троугла ABM једино могу бити дужи AM и BM.
Ако је основица дуж AM, онда имамо:



$\triangle ACM$ - збир два ун. угла троугла једнак је спољашњем код трећег темена

$\measuredangle AMB = 2x$

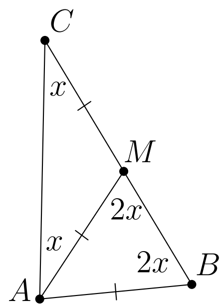
$x + 2x = \measuredangle BAC = 78°$

$3x = 78°$

$x = 26°$

$\measuredangle ACB = x = 26°$, $\measuredangle ABC = 180° - (78° + 26°) = 76°$

Ако је основица дуж BM, онда имамо:



$78° + 2x + x = 180°$ (збир ун. углова троугла ABC)

$3x = 102°$

$x = 34°$

$\measuredangle ACB = x = 34°$, $\measuredangle ABC = 2x = 68°$

$2°$: $\measuredangle AMB$ је туп и $\measuredangle AMC$ је оштар. Ово је очигледно симетрично случају $1°$ у смислу да су тачке B и C замениле улоге па се добијају још два решења $\measuredangle ACB = 76°$, $\measuredangle ABC = 26°$ или $\measuredangle ACB = 68°$, $\measuredangle ABC = 34°$.

Дакле, укупно има четири решења и она су приказана у следећој табели:

$\measuredangle BAC$	$\measuredangle ABC$	$\measuredangle ACB$
78°	76°	26°
78°	68°	34°
78°	26°	76°
78°	34°	68°

III Комбинаторика

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**A**	**B**	**B**

Задатак 4. Најпре имамо да је $\frac{2}{5} = 0{,}4$ и $\frac{1}{2} = 0{,}5$. Означимо са a, b, c, d и f бројеве које треба да одредимо (види први од наредна четири магична квадрата).

d	0,4	c
e	a	f
0,7	b	0,5

d	0,4	c
e	0,8	f
0,7	b	0,5

1,1	0,4	0,9
e	0,8	f
0,7	1,2	0,5

1,1	0,4	0,9
0,6	0,8	1
0,7	1,2	0,5

Из $0{,}4 + a + b = 0{,}7 + b + 0{,}5$ добијамо $0{,}4 + a = 0{,}7 + 0{,}5$, а из чега добијамо да је $a = 0{,}8$ (други магични квадрат). Сада имамо да је 0,8 аритметичка средина од 0,4 и b; 0,7 и c; 0,5 и d; одакле добијамо да је $b = 1{,}2$; $c = 0{,}9$; $d = 1{,}1$; (трећи магични квадрат). Како је карактеристични збир једнак 2,4 (нпр. $0{,}4+0{,}8+1{,}2$), то добијамо да је $e = 2{,}4 - (0{,}7 + 1{,}1) = 0{,}6$ и $f = 2{,}4 - (0{,}9 + 0{,}5) = 1$. Овим смо одредили све бројеве који су недостајали (четврти магични квадрат).

7. и 8. разред

I Алгебра и бројеви

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**Г**	**А**	**Д**

Задатак 4. Означимо са s мерни број траженог растојања мереног у километрима. У почетку, бициклиста је прешао 15 km за пола сата, што значи да је возио просечном брзином 30 km/h. Време потребно да се пређе пут $(s - 15)$ km возећи том просечном брзином је $\frac{s-15}{30}$ h, док време потребно да се пређе исти тај пут возећи просечном брзином 40 km/h $(40 = 30 + 10)$ је $\frac{s-15}{40}$ h. Према подацима из задатка закључујемо да је $\frac{s-15}{30}$ веће од $\frac{s-15}{40}$ за $1\frac{1}{4}$ (1 h + 15 min $= 1\frac{1}{4}$ h), па отуда добијамо једначину

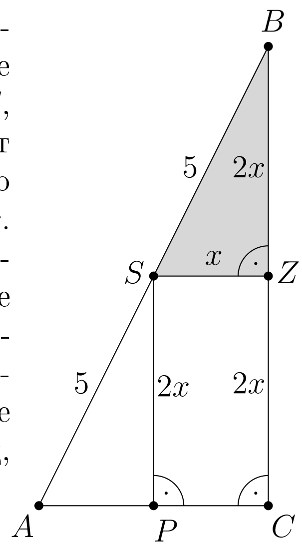
$$\frac{s-15}{30} - \frac{s-15}{40} = 1\frac{1}{4}\,,$$

чијим решавањем добијамо да је $s = 165$. Дакле, одговор је 165 km.

II Геометрија

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**В**	**Б**	**В**

Задатак 4. На датој слици (десно) дужи AB, CB и AC представљају мердевине, зид и под, редом. Тачка S је средиште мердевина, док су P и Z подножја нормала из S на AC и BC, редом. Дакле, дужине дужи SP и SZ представљају удаљеност средишта мердевина од пода и зида, редом. Како је SP дупло веће од SZ, то ако дужину SZ означимо са x, важиће $SP = 2x$. Из $SZ \parallel AC$ и S је средиште од AB, добијамо да је SZ средња линија троугла ACB која одговара страници AC, а одатле добијамо да је Z средиште од BC. Како је $SPCZ$ правоугаоник, то је $SP = ZC$. Сада имамо да је $ZC = ZB = 2x$. Питагорина теорема примењена на правоугли троугао SZB даје једнакост $x^2 + (2x)^2 = 5^2$, из које добијамо $x = \sqrt{5}$. Најзад, $CB = 4x = 4\sqrt{5}$, па је тражена висина једнака $4\sqrt{5}$ m.



III Комбинаторика

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**В**	**Г**	**В**

Задатак 4. Производ цифара неког природног броја је једнак 0 ако и само ако је бар једна његова цифра једнака 0.
а) Потребно је одредити колико има десетоцифрених бројева који имају бар једну цифру једнаку 0. Тај број ћемо добити када од броја свих дестоцифрених бројева одузмемо број десетоцифрених бројева којима ниједна цифра није једнака 0 . Дакле, одговор је $9 \cdot 10^9 - 9^{10}$.
б) Ако су све цифре у десетоцифреном броју различите, онда ће једна од њих бити једнака 0, па је потребно одредити колико има десетоцифрених бројева којима су све цифре различите. Њих има $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

1. и 2. разред

I Алгебра и бројеви

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**В**	**Г**	**Г**

Задатак 4. Кренимо од тачне једнакости $5^3 - 5^2 = 10^2$. Ако ту једнакост помножимо са 5^{2k}, где је k произвољан природан број, добијамо једнакост $5^{2k} \cdot 5^3 - 5^{2k} \cdot 5^2 = 5^{2k} \cdot 10^2$, која је еквивалентна са $5^{2k+3} - 5^{2k+2} = \left(5^k \cdot 10\right)^2$. Приметимо да су $2k+3, 2k+2, 5^k \cdot 10$ природни бројеви. Из последње једнакости закључујемо да за уређену тројку природних бројева $(x, y, z) = (2k+3, 2k+2, 5^k \cdot 10)$ важи једнакост $5^x - 5^y = z^2$. Како је скуп

$$\{(x, y, z) \mid x = 2k+3 \wedge y = 2k+2 \wedge z = 5^k \cdot 10 \wedge k \in \mathbb{N}\}$$

($\mathbb{N}$ је скуп природних бројева) бесконачан, то добијамо да је исказ из задатка тачан.

II Геометрија

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**Д**	**В**	**Б**

Задатак 4. Нека је k произвољан природан број. Како за бројеве $3k, 4k, 5k$ важи $(3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2$, закључујемо да постоји троугао чије странице имају мерне бројеве $3k, 4k, 5k$ (што су природни бројеви) као и да је тај троугао правоугли. Обим овог троугла је $12k$. Па ако за k узмемо природан број 12^{2019}, добијамо да тај троугао испуњава услове задатка, као и да је његов обим $12 \cdot 12^{2019} = 12^{2020}$, што је 2020-и степен неког природног броја. Дакле, одговор на постављено питање је потврдан.

III Комбинаторика

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**Д**	**Г**	**Г**

Задатак 4. Ако се истим словима обележе дати бројеви који имају исти остатак при дељењу са 3, онда се ти бројеви једино могу поређати на неки од следећа 4 начина:

a	b	c
b	c	a
c	a	b

a	b	c
c	a	b
b	c	a

a	b	c
a	b	c
a	b	c

a	a	a
b	b	b
c	c	c

Како три групе бројева ($\{1,4,7\}$, $\{2,5,8\}$ и $\{3,6,9\}$) могу на $3!$ начина бити обележене словима a, b и c, и како за свако слово, три броја из одговарајуће групе могу мењати места на $3!$ начина, то добијамо да се слова могу заменити датим бројевима на $6 \cdot (6 \cdot 6 \cdot 6)$, тј. 6^4 начина. Дакле, укупан број начина да се попуни табела је $4 \cdot 6^4$.